

## じっくり勉強すれば身につく統計入門

2016年6月4日 森戸記念館

「じっくり勉強すれば身につく統計解析」を副題としたシリーズ全3巻がサイエンティスト社から刊行されている。タイトルは「医薬品開発のための統計解析，第1部基礎，第2部実験計画法，第3部非線形モデル」である。今回は，この本の第2部2.3節のダミー変数の使い方についてその基礎について解説し，各種の統計モデルの活用をつけてもらいたい。また，第3部のテーマである「非線形回帰モデル」の最初の応用例である「逆推定」についてもじっくりと解説する

### ダミー変数の基礎

伏見 啓（一般財団法人日本食品分析センター）

- 第2部 実験計画法
- 2章3節 ダミー変数による質的因子の効果の推定

### 非線形回帰を用いた逆推定の基礎

中西 展大（田辺三菱製薬株式会社）

- 第3部 非線形モデル
- 1. 非線形最小2乗法（基礎）
- 1.1 線形と非線形
- 1.2 非線形最小2乗法の基本的な考え方

じっくり勉強すれば身につく統計入門  
ダミー変数による質的因子の効果の推定  
第2部 実験計画法  
2.3 ダミー変数による質的因子の効果の推定

(一財)日本食品分析センター  
安全性試験課 伏見啓

1

## はじめに

「じっくり勉強すれば身につく統計入門」の発表も12回目となりました。  
なお、過去の発表資料はサイエンティスト社のホームページで公開されています。  
[http://www.scientist-press.com/12\\_280.html](http://www.scientist-press.com/12_280.html)

今回は、  
医薬品開発のための統計解析  
-第2部 実験計画法- 2章3節  
ダミー変数による質的因子の効果の推定

演習ファイルの入手先  
[http://www.scientist-press.com/11\\_328.html](http://www.scientist-press.com/11_328.html)



通称:グリーン本

2

# 目標

- 回帰式を用いた質的因子の効果の推定  
これには**ダミー変数**が必要
- **ダミー変数の基本的な作成方法を理解する**

$$y_{ij} = \mu + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_{ij}$$

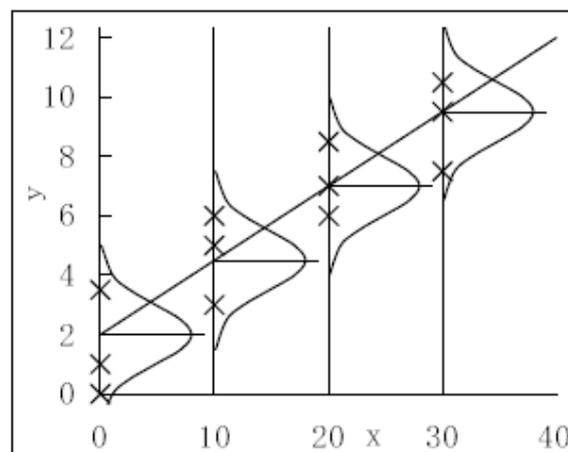
3

# 目的

<量的因子の場合>

x と y の関係を回帰式で表わす (LINEST 関数で推定)

量的因子



$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_{ij}$$

4

# 目的

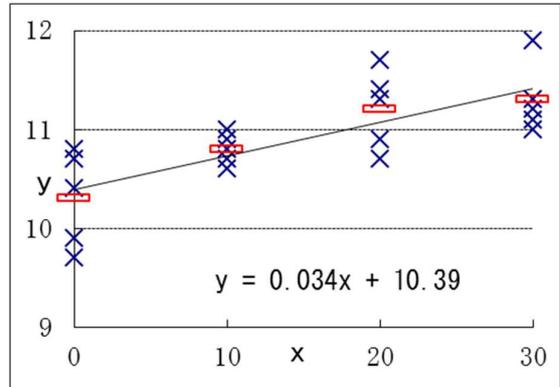
## <量的因子の場合>

x と y の関係を回帰式で表わす (LINEST 関数で推定)

LINEST 関数による解析例

| 水準 | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
|----|------|------|------|------|------|
| 0  | 10.8 | 9.9  | 9.7  | 10.4 | 10.7 |
| 10 | 10.7 | 10.6 | 11.0 | 10.8 | 10.9 |
| 20 | 11.4 | 10.7 | 10.9 | 11.3 | 11.7 |
| 30 | 11.9 | 11.2 | 11.0 | 11.1 | 11.3 |

|        | x      | const  |       |
|--------|--------|--------|-------|
| 回帰係数   | 0.034  | 10.390 |       |
| その標準誤差 | 0.007  | 0.136  |       |
| 寄与率    | 0.547  | 0.364  | 標準偏差  |
| F比     | 21.766 | 18     | 残差自由度 |
| 回帰平方和  | 2.890  | 2.390  | 残差平方和 |
| t 値    | 4.665  | 76.206 |       |
| p 値    | 0.0002 | 0.0000 |       |



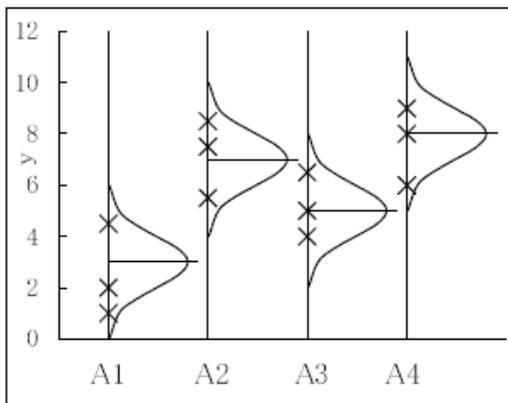
5

# 目的

## <質的因子の場合>

同様に各水準の効果 $\alpha_i$ を回帰式で表わし、LINEST 関数で推定したい。

質的因子

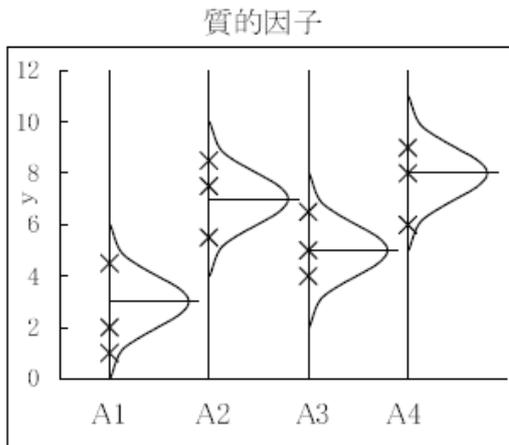


## ダミー変数

- 複雑なデータの解析に広く利用することができる

6

# 質的因子について



○水準番号1,2, ... は序数(1st, 2nd, ...)

- 量を表わすものではない
- そのまま回帰分析を適用することはできない.

○ 1 因子実験(質的因子)では,  
データ $y_{ij}$ の構造を以下のように表せる

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

$$= \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

基準+効果+誤差

7

## 質的因子の解析

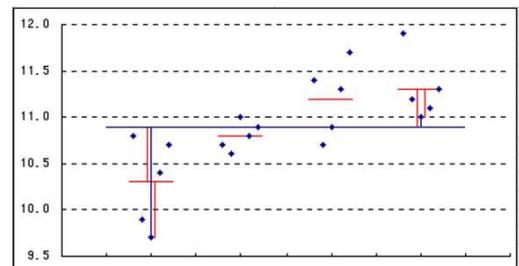
$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

$$= \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

基準+効果+誤差

解を一意に定めるため

$$\sum_{i=1}^a n_i \alpha_i = 0$$
$$\alpha_i = \mu_i - \mu$$



基準 $\mu$ は総平均と一致

水準間平方和 $S_A$ が $\alpha_i$ の推定値 $a_i$ の2乗和で表わされる

→分散分析表を用いた解析

この式だと複雑なモデルへ拡張が困難

8

# ダミー変数1(1, 0)型

## <目的>

第1水準のコントロールと他の水準を比べて  
どれだけ違うか？

## <考え方>

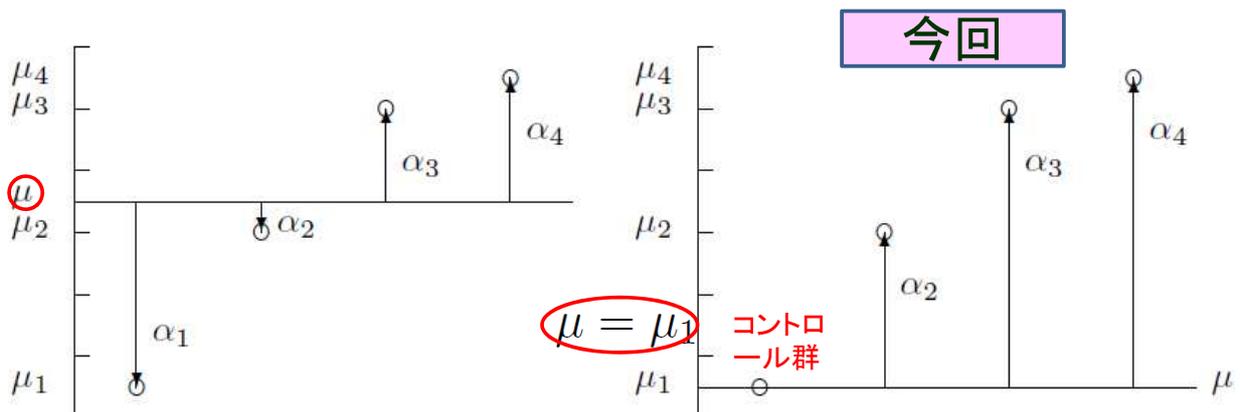
コントロールの平均を基準とし各水準の効果を評価し  
てみる.

以下のデータを例として利用

| 水準 | n | 平均   | データ |    |    |    |    |    |
|----|---|------|-----|----|----|----|----|----|
|    |   |      | 1   | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| A1 | 6 | 46.0 | 43  | 45 | 42 | 47 | 49 | 50 |
| A2 | 3 | 49.0 | 47  | 51 | 49 |    |    |    |
| A3 | 3 | 53.0 | 54  | 48 | 57 |    |    |    |
| A4 | 3 | 58.0 | 55  | 58 | 61 |    |    |    |
| A5 | 3 | 51.0 | 52  | 48 | 53 |    |    |    |

9

# ダミー変数1(1, 0)型



総平均からの距離を  
効果とする方法

第1水準の母平均 $\mu_1$ を  
基準 $\mu$ とし、 $\mu$ からの距離を  
効果とする方法

$$\sum_{i=1}^a n_i \alpha_i = 0$$

基準 = 総平均

$$\alpha_i = \mu_i - \mu$$

$$\mu = \mu_1$$

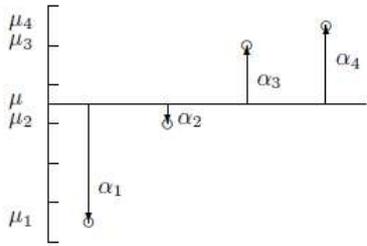
基準 = 母平均 $\mu_1$

$$\alpha_i = \mu_i - \mu_1 \quad \text{効果}$$

$i=1$  のとき

$$\alpha_1 = \mu_1 - \mu_1 = 0 \quad \alpha_1 = 0 \quad 10$$

# モデル式でみる

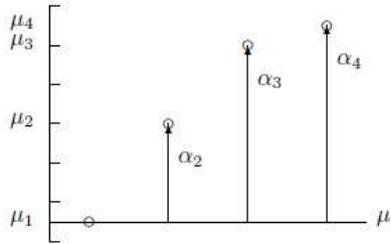


$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

$$= \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

総平均 + 効果 + 誤差

今回



基準↓

行の対応を示す: A1の効果

コントロール群A1

水準ごとに分ける

$$y_{ij} = \mu + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \dots \\ \alpha_a \end{pmatrix} + \varepsilon_{ij}$$

$\mu = \mu_1$

$$= \mu + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_{ij}$$

A<sub>2</sub> ... A<sub>a</sub>

α<sub>i</sub>を推定するため説明変数を設定する式で表わす必要があるため。

例

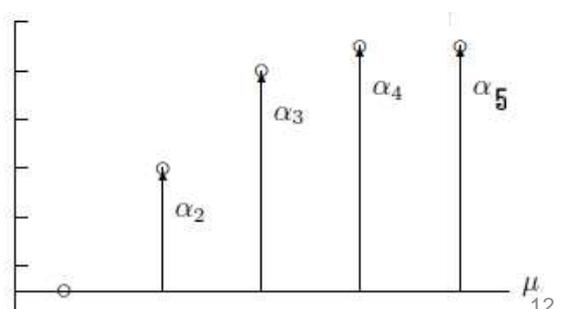
|    |   | データ  |    |    |    |    |    |    |
|----|---|------|----|----|----|----|----|----|
| 水準 | n | 平均   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| A1 | 6 | 46.0 | 43 | 45 | 42 | 47 | 49 | 50 |
| A2 | 3 | 49.0 | 47 | 51 | 49 |    |    |    |
| A3 | 3 | 53.0 | 54 | 48 | 57 |    |    |    |
| A4 | 3 | 58.0 | 55 | 58 | 61 |    |    |    |
| A5 | 3 | 51.0 | 52 | 48 | 53 |    |    |    |

$$= \mu + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_{ij}$$

(A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>, A<sub>4</sub>, A<sub>5</sub>)

$$= \mu + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_{ij}$$

$\mu = \mu_1$



# ダミー変数

$\mu = \mu_1$

$$= \mu + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_{ij} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_a \end{pmatrix}$$

ダミー変数

ダミー変数

例

$$y_{ij} = \mu + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_{ij}$$

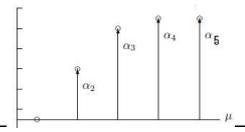
- ✓ ダミー変数は「水準数 - 1」個
- ✓ 水準が2, 3, ..., a のとき1となりそれ以外は0
- ✓ 基準となった第1水準は全部のダミー変数の値が0

## ダミー変数：具体例（ダミー変数1）

| 水準 | n | 平均   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
|----|---|------|----|----|----|----|----|----|
| A1 | 6 | 46.0 | 43 | 45 | 42 | 47 | 49 | 50 |
| A2 | 3 | 49.0 | 47 | 51 | 49 |    |    |    |
| A3 | 3 | 53.0 | 54 | 48 | 57 |    |    |    |
| A4 | 3 | 58.0 | 55 | 58 | 61 |    |    |    |
| A5 | 3 | 51.0 | 52 | 48 | 53 |    |    |    |

$$y_{ij} = \mu + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \dots \\ \alpha_a \end{pmatrix} + \varepsilon_{ij}$$

$\mu = \mu_1$



|          |    |                                     |       |            |            |            |            |                    |       |   |   |   |   |                    |
|----------|----|-------------------------------------|-------|------------|------------|------------|------------|--------------------|-------|---|---|---|---|--------------------|
| $y_{11}$ | 43 | $\mu + \varepsilon_{11}$            | $\mu$ | 0          | 0          | 0          | 0          | $\varepsilon_{11}$ | $\mu$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\varepsilon_{11}$ |
| $y_{12}$ | 45 | $\mu + \varepsilon_{12}$            | $\mu$ | 0          | 0          | 0          | 0          | $\varepsilon_{12}$ | $\mu$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\varepsilon_{12}$ |
| $y_{13}$ | 42 | $\mu + \varepsilon_{13}$            | $\mu$ | 0          | 0          | 0          | 0          | $\varepsilon_{13}$ | $\mu$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\varepsilon_{13}$ |
| $y_{14}$ | 47 | $\mu + \varepsilon_{14}$            | $\mu$ | 0          | 0          | 0          | 0          | $\varepsilon_{14}$ | $\mu$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\varepsilon_{14}$ |
| $y_{15}$ | 49 | $\mu + \varepsilon_{15}$            | $\mu$ | 0          | 0          | 0          | 0          | $\varepsilon_{15}$ | $\mu$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\varepsilon_{15}$ |
| $y_{16}$ | 50 | $\mu + \varepsilon_{16}$            | $\mu$ | 0          | 0          | 0          | 0          | $\varepsilon_{16}$ | $\mu$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\varepsilon_{16}$ |
| $y_{21}$ | 47 | $\mu + \alpha_2 + \varepsilon_{21}$ | $\mu$ | $\alpha_2$ | 0          | 0          | 0          | $\varepsilon_{21}$ | $\mu$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $\varepsilon_{21}$ |
| $y_{22}$ | 51 | $\mu + \alpha_2 + \varepsilon_{22}$ | $\mu$ | $\alpha_2$ | 0          | 0          | 0          | $\varepsilon_{22}$ | $\mu$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $\varepsilon_{22}$ |
| $y_{23}$ | 49 | $\mu + \alpha_2 + \varepsilon_{23}$ | $\mu$ | $\alpha_2$ | 0          | 0          | 0          | $\varepsilon_{23}$ | $\mu$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $\varepsilon_{23}$ |
| $y_{31}$ | 54 | $\mu + \alpha_3 + \varepsilon_{31}$ | $\mu$ | 0          | $\alpha_3$ | 0          | 0          | $\varepsilon_{31}$ | $\mu$ | 0 | 1 | 0 | 0 | $\varepsilon_{31}$ |
| $y_{32}$ | 48 | $\mu + \alpha_3 + \varepsilon_{32}$ | $\mu$ | 0          | $\alpha_3$ | 0          | 0          | $\varepsilon_{32}$ | $\mu$ | 0 | 1 | 0 | 0 | $\varepsilon_{32}$ |
| $y_{33}$ | 57 | $\mu + \alpha_3 + \varepsilon_{33}$ | $\mu$ | 0          | $\alpha_3$ | 0          | 0          | $\varepsilon_{33}$ | $\mu$ | 0 | 1 | 0 | 0 | $\varepsilon_{33}$ |
| $y_{41}$ | 55 | $\mu + \alpha_4 + \varepsilon_{41}$ | $\mu$ | 0          | 0          | $\alpha_4$ | 0          | $\varepsilon_{41}$ | $\mu$ | 0 | 0 | 1 | 0 | $\varepsilon_{41}$ |
| $y_{42}$ | 58 | $\mu + \alpha_4 + \varepsilon_{42}$ | $\mu$ | 0          | 0          | $\alpha_4$ | 0          | $\varepsilon_{42}$ | $\mu$ | 0 | 0 | 1 | 0 | $\varepsilon_{42}$ |
| $y_{43}$ | 61 | $\mu + \alpha_4 + \varepsilon_{43}$ | $\mu$ | 0          | 0          | $\alpha_4$ | 0          | $\varepsilon_{43}$ | $\mu$ | 0 | 0 | 1 | 0 | $\varepsilon_{43}$ |
| $y_{51}$ | 52 | $\mu + \alpha_5 + \varepsilon_{51}$ | $\mu$ | 0          | 0          | 0          | $\alpha_5$ | $\varepsilon_{51}$ | $\mu$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $\varepsilon_{51}$ |
| $y_{52}$ | 48 | $\mu + \alpha_5 + \varepsilon_{52}$ | $\mu$ | 0          | 0          | 0          | $\alpha_5$ | $\varepsilon_{52}$ | $\mu$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $\varepsilon_{52}$ |
| $y_{53}$ | 53 | $\mu + \alpha_5 + \varepsilon_{53}$ | $\mu$ | 0          | 0          | 0          | $\alpha_5$ | $\varepsilon_{53}$ | $\mu$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $\varepsilon_{53}$ |

表示2.3.2

$\mu = \mu_1$

|          |    |       |   |   |   |   |                 |
|----------|----|-------|---|---|---|---|-----------------|
| $y_{11}$ | 43 | $\mu$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\epsilon_{11}$ |
| $y_{12}$ | 45 | $\mu$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\epsilon_{12}$ |
| $y_{13}$ | 42 | $\mu$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\epsilon_{13}$ |
| $y_{14}$ | 47 | $\mu$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\epsilon_{14}$ |
| $y_{15}$ | 49 | $\mu$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\epsilon_{15}$ |
| $y_{16}$ | 50 | $\mu$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\epsilon_{16}$ |
| $y_{21}$ | 47 | $\mu$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $\epsilon_{21}$ |
| $y_{22}$ | 51 | $\mu$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $\epsilon_{22}$ |
| $y_{23}$ | 49 | $\mu$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $\epsilon_{23}$ |
| $y_{31}$ | 54 | $\mu$ | 0 | 1 | 0 | 0 | $\epsilon_{31}$ |
| $y_{32}$ | 48 | $\mu$ | 0 | 1 | 0 | 0 | $\epsilon_{32}$ |
| $y_{33}$ | 58 | $\mu$ | 0 | 1 | 0 | 0 | $\epsilon_{33}$ |
| $y_{41}$ | 55 | $\mu$ | 0 | 0 | 1 | 0 | $\epsilon_{41}$ |
| $y_{42}$ | 58 | $\mu$ | 0 | 0 | 1 | 0 | $\epsilon_{42}$ |
| $y_{43}$ | 61 | $\mu$ | 0 | 0 | 1 | 0 | $\epsilon_{43}$ |
| $y_{51}$ | 52 | $\mu$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $\epsilon_{51}$ |
| $y_{52}$ | 48 | $\mu$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $\epsilon_{52}$ |
| $y_{53}$ | 53 | $\mu$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $\epsilon_{53}$ |

| 水準 | y  | ダミー変数1 |    |    |    |
|----|----|--------|----|----|----|
|    |    | A2     | A3 | A4 | A5 |
| A1 | 43 | 0      | 0  | 0  | 0  |
| A1 | 45 | 0      | 0  | 0  | 0  |
| A1 | 42 | 0      | 0  | 0  | 0  |
| A1 | 47 | 0      | 0  | 0  | 0  |
| A1 | 49 | 0      | 0  | 0  | 0  |
| A2 | 47 | 1      | 0  | 0  | 0  |
| A2 | 51 | 1      | 0  | 0  | 0  |
| A2 | 49 | 1      | 0  | 0  | 0  |
| A3 | 54 | 0      | 1  | 0  | 0  |
| A3 | 48 | 0      | 1  | 0  | 0  |
| A3 | 57 | 0      | 1  | 0  | 0  |
| A4 | 55 | 0      | 0  | 1  | 0  |
| A4 | 58 | 0      | 0  | 1  | 0  |
| A4 | 61 | 0      | 0  | 1  | 0  |
| A5 | 52 | 0      | 0  | 0  | 1  |
| A5 | 48 | 0      | 0  | 0  | 1  |
| A5 | 53 | 0      | 0  | 0  | 1  |

LINEST 関数で利用すると...

$\mu$ の推定値=第1水準の平均

$\alpha_i$ : 第2, 3, 4水準の平均が第1水準からどれだけ異なるか

|       | A5     | A4     | A3    | A2    | const  |
|-------|--------|--------|-------|-------|--------|
| 推定値   | 5.000  | 12.000 | 7.000 | 3.000 | 46.000 |
| 標準誤差  | 2.270  | 2.270  | 2.270 | 2.270 | 1.311  |
| 寄与率   | 0.703  | 3.211  | 標準偏差  | #N/A  | #N/A   |
| F比    | 7.676  | 13     | 残差自由度 | #N/A  | #N/A   |
| 回帰平方和 | 316.50 | 134.00 | 残差平方和 | #N/A  | #N/A   |
| t     | 2.202  | 5.286  | 3.083 | 1.321 |        |
| p     | 0.046  | 0.000  | 0.009 | 0.209 |        |

平均と比較

| 水準 | n | 平均   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
|----|---|------|----|----|----|----|----|----|
| A1 | 6 | 46.0 | 43 | 45 | 42 | 47 | 49 | 50 |
| A2 | 3 | 49.0 | 47 | 51 | 49 |    |    |    |
| A3 | 3 | 53.0 | 54 | 48 | 57 |    |    |    |
| A4 | 3 | 58.0 | 55 | 58 | 61 |    |    |    |
| A5 | 3 | 51.0 | 52 | 48 | 53 |    |    |    |

各水準の平均  
= const + 効果

分散分析表の値も一致

| 分散分析表 |        |     |        |       |        |
|-------|--------|-----|--------|-------|--------|
| 要因    | 平方和    | 自由度 | 平均平方   | F比    | p値     |
| 水準間   | 316.50 | 4   | 79.125 | 7.676 | 0.0021 |
| 残差    | 134.00 | 13  | 10.308 | 1.000 |        |
| 全体    | 450.50 | 17  | 26.500 |       |        |

|      | A5     | A4     | A3    | A2    | const  |
|------|--------|--------|-------|-------|--------|
| 推定値  | 5.000  | 12.000 | 7.000 | 3.000 | 46.000 |
| 標準誤差 | 2.270  | 2.270  | 2.270 | 2.270 | 1.311  |
|      | 0.703  | 3.211  | #N/A  | #N/A  | #N/A   |
|      | 7.676  | 13     | #N/A  | #N/A  | #N/A   |
|      | 316.50 | 134.00 | #N/A  | #N/A  | #N/A   |
| t    | 2.202  | 5.286  | 3.083 | 1.321 |        |
| p    | 0.046  | 0.000  | 0.009 | 0.209 |        |

2行目の推定値のSEからt値, p値を求めることができる

分散分析表からの計算値

| 水準 |    | 差      | 標準誤差  | t(0.05) | 2.160        | t値 | p値 |
|----|----|--------|-------|---------|--------------|----|----|
| A1 | A2 | -3.00  | 2.270 | -1.321  | 0.209        |    |    |
| A1 | A3 | -7.00  | 2.270 | -3.083  | <b>0.009</b> |    |    |
| A1 | A4 | -12.00 | 2.270 | -5.286  | <b>0.000</b> |    |    |
| A1 | A5 | -5.00  | 2.270 | -2.202  | <b>0.046</b> |    |    |
| A2 | A3 | -4.00  | 2.621 | -1.526  | 0.151        |    |    |
| A2 | A4 | -9.00  | 2.621 | -3.433  | <b>0.004</b> |    |    |
| A2 | A5 | -2.00  | 2.621 | -0.763  | 0.459        |    |    |
| A3 | A4 | -5.00  | 2.621 | -1.907  | 0.079        |    |    |
| A3 | A5 | 2.00   | 2.621 | 0.763   | 0.459        |    |    |
| A4 | A5 | 7.00   | 2.621 | 2.670   | <b>0.019</b> |    |    |

推定値, t値とp値は一致

ダミー変数を上手く作成すると結果をみてすぐコントロールとの差がわかる

17

## ダミー変数: 具体例(ダミー変数2)

JMPは  $\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0$  という性質を持つ

この条件を満たすために $\alpha_a$ は

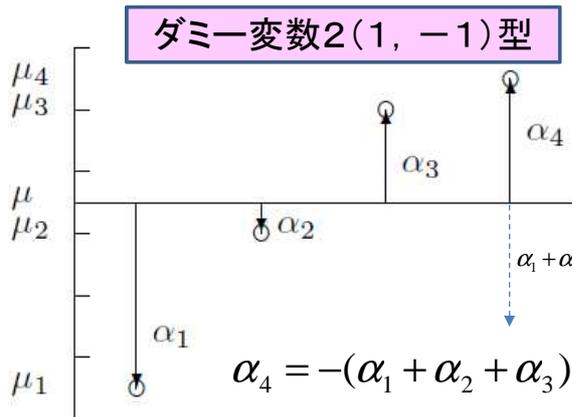
$$\alpha_a = -\sum_{i=1}^{a-1} \alpha_i = -\alpha_1 - \alpha_2 \cdots - \alpha_{a-1}$$

とならなくてははいけない。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \alpha_i &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{a-1} + \alpha_a = 0 \\ \alpha_a &= -\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{a-1} \\ &= -(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{a-1}) = -\sum_{i=1}^{a-1} \alpha_i \end{aligned}$$

18

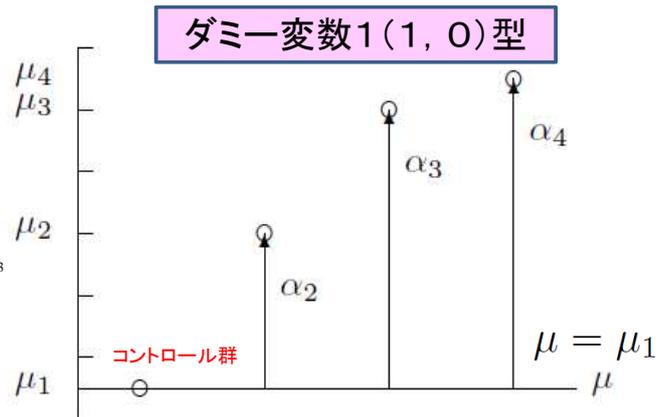
# ダミー変数2(1, -1)型



全水準の効果の推定値の和を0とする方法

$$\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0$$

$$\alpha_i = \mu_i - \mu$$



第1水準の母平均 $\mu_1$ を基準 $\mu$ とし、 $\mu$ からの距離を効果とする方法

$$\mu = \mu_1 \quad \text{基準} = \text{母平均} \mu_1$$

$$\alpha_i = \mu_i - \mu_1 \quad \text{効果}$$

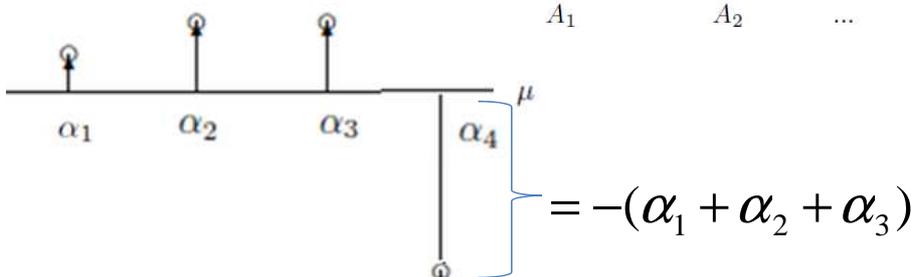
$i=1$  のとき

$$\alpha_1 = \mu_1 - \mu_1 = 0 \quad \alpha_1 = 0 \quad 19$$

第 $a$ の効果:  $\alpha_a = -\sum_{i=1}^{a-1} \alpha_i = -\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{a-1}$

$$y_{ij} = \mu + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{a-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_{a-1} \\ A_a \end{pmatrix}$$

例



$$= \mu + \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \alpha_3 & \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \end{pmatrix} + \varepsilon_{ij} = \mu + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \varepsilon_{ij}$$

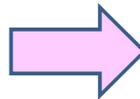
$$y_{ij} = \mu + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{a-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_{a-1} \\ A_a \end{pmatrix}$$

$$\alpha_a = -\sum_{i=1}^{a-1} \alpha_i = -\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{a-1}$$

下の例では第5水準を上の式の $\alpha$ とする

|  |   |  |
|--|---|--|
| $\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \\ y_{16} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \\ y_{31} \\ y_{32} \\ y_{33} \\ y_{41} \\ y_{42} \\ y_{43} \\ y_{51} \\ y_{52} \\ y_{53} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ 45 \\ 42 \\ 47 \\ 49 \\ 50 \\ 47 \\ 51 \\ 49 \\ 54 \\ 48 \\ 58 \\ 55 \\ 58 \\ 61 \\ 52 \\ 48 \\ 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu + \alpha_1 \\ \mu + \alpha_2 \\ \mu + \alpha_2 \\ \mu + \alpha_2 \\ \mu + \alpha_3 \\ \mu + \alpha_3 \\ \mu + \alpha_3 \\ \mu + \alpha_4 \\ \mu + \alpha_4 \\ \mu + \alpha_4 \\ \mu - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 \\ \mu - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 \\ \mu - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{15} \\ \varepsilon_{16} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{41} \\ \varepsilon_{42} \\ \varepsilon_{43} \\ \varepsilon_{51} \\ \varepsilon_{52} \\ \varepsilon_{53} \end{pmatrix}$ | $= \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_3 \\ \alpha_3 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_4 \\ \alpha_4 \\ \alpha_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{15} \\ \varepsilon_{16} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{41} \\ \varepsilon_{42} \\ \varepsilon_{43} \\ \varepsilon_{51} \\ \varepsilon_{52} \\ \varepsilon_{53} \end{pmatrix}$ | $= \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{15} \\ \varepsilon_{16} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{41} \\ \varepsilon_{42} \\ \varepsilon_{43} \\ \varepsilon_{51} \\ \varepsilon_{52} \\ \varepsilon_{53} \end{pmatrix}$ |
|--|---|--|

$$= \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{15} \\ \varepsilon_{16} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{41} \\ \varepsilon_{42} \\ \varepsilon_{43} \\ \varepsilon_{51} \\ \varepsilon_{52} \\ \varepsilon_{53} \end{pmatrix}$$



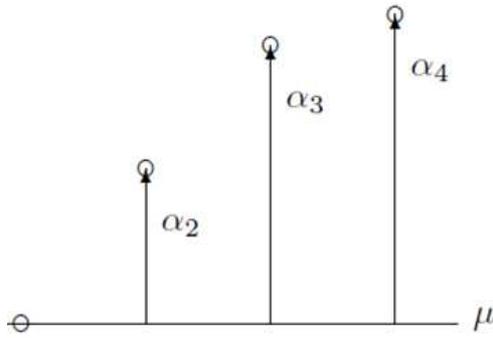
| 水準 | y  | ガミ-変数2 |    |    |    |
|----|----|--------|----|----|----|
|    |    | A1     | A2 | A3 | A4 |
| A1 | 43 | 1      | 0  | 0  | 0  |
| A1 | 45 | 1      | 0  | 0  | 0  |
| A1 | 42 | 1      | 0  | 0  | 0  |
| A1 | 47 | 1      | 0  | 0  | 0  |
| A1 | 49 | 1      | 0  | 0  | 0  |
| A1 | 50 | 1      | 0  | 0  | 0  |
| A2 | 47 | 0      | 1  | 0  | 0  |
| A2 | 51 | 0      | 1  | 0  | 0  |
| A2 | 49 | 0      | 1  | 0  | 0  |
| A3 | 54 | 0      | 0  | 1  | 0  |
| A3 | 48 | 0      | 0  | 1  | 0  |
| A3 | 57 | 0      | 0  | 1  | 0  |
| A4 | 55 | 0      | 0  | 0  | 1  |
| A4 | 58 | 0      | 0  | 0  | 1  |
| A4 | 61 | 0      | 0  | 0  | 1  |
| A5 | 52 | -1     | -1 | -1 | -1 |
| A5 | 48 | -1     | -1 | -1 | -1 |
| A5 | 53 | -1     | -1 | -1 | -1 |

# ちょっとまとめてみよう

## ダミー変数1(1, 0)型とダミー変数2(1, -1)型

### ダミー変数1(1, 0)型: 例

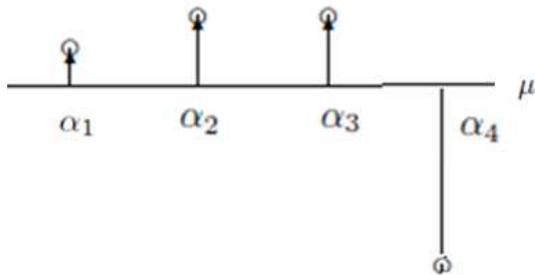
1つ基準 =  $\mu$



$$\mu + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_{ij}$$

### ダミー変数2(1, -1)型: 例

効果は全て足して0を利用



$$\mu + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \varepsilon_{ij}$$

23

## LINEST 関数で比べると...

→ 上2行を除いた部分と同じ

表示 2.3.2 元データとダミー変数

| 水準 | y  | ダミー変数1 |    |    |    | ダミー変数2 |    |    |    |
|----|----|--------|----|----|----|--------|----|----|----|
|    |    | A2     | A3 | A4 | A5 | A1     | A2 | A3 | A4 |
| A1 | 43 | 0      | 0  | 0  | 0  | 1      | 0  | 0  | 0  |
| A1 | 45 | 0      | 0  | 0  | 0  | 1      | 0  | 0  | 0  |
| A1 | 42 | 0      | 0  | 0  | 0  | 1      | 0  | 0  | 0  |
| A1 | 47 | 0      | 0  | 0  | 0  | 1      | 0  | 0  | 0  |
| A1 | 49 | 0      | 0  | 0  | 0  | 1      | 0  | 0  | 0  |
| A1 | 50 | 0      | 0  | 0  | 0  | 1      | 0  | 0  | 0  |
| A2 | 47 | 1      | 0  | 0  | 0  | 0      | 1  | 0  | 0  |
| A2 | 51 | 1      | 0  | 0  | 0  | 0      | 1  | 0  | 0  |
| A2 | 49 | 1      | 0  | 0  | 0  | 0      | 1  | 0  | 0  |
| A3 | 54 | 0      | 1  | 0  | 0  | 0      | 0  | 1  | 0  |
| A3 | 48 | 0      | 1  | 0  | 0  | 0      | 0  | 1  | 0  |
| A3 | 57 | 0      | 1  | 0  | 0  | 0      | 0  | 1  | 0  |
| A4 | 55 | 0      | 0  | 1  | 0  | 0      | 0  | 0  | 1  |
| A4 | 58 | 0      | 0  | 1  | 0  | 0      | 0  | 0  | 1  |
| A4 | 61 | 0      | 0  | 1  | 0  | 0      | 0  | 0  | 1  |
| A5 | 52 | 0      | 0  | 0  | 1  | -1     | -1 | -1 | -1 |
| A5 | 48 | 0      | 0  | 0  | 1  | -1     | -1 | -1 | -1 |
| A5 | 53 | 0      | 0  | 0  | 1  | -1     | -1 | -1 | -1 |

表示 2.3.3 LINEST 関数の解

ダミー変数1の解

|      | A5     | A4     | A3    | A2    | const  |
|------|--------|--------|-------|-------|--------|
| 推定値  | 5.000  | 12.000 | 7.000 | 3.000 | 46.000 |
| 標準誤差 | 2.270  | 2.270  | 2.270 | 2.270 | 1.311  |
|      | 0.703  | 3.211  | #N/A  | #N/A  | #N/A   |
|      | 7.676  | 13     | #N/A  | #N/A  | #N/A   |
| 平方和  | 316.50 | 134.00 | #N/A  | #N/A  | #N/A   |
| t    | 2.202  | 5.286  | 3.083 | 1.321 | 35.096 |
| p    | 0.046  | 0.000  | 0.009 | 0.209 | 0.000  |

ダミー変数2の解

|      | A4     | A3     | A2     | A1     | const  |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 推定値  | 6.600  | 1.600  | -2.400 | -5.400 | 51.400 |
| 標準誤差 | 1.637  | 1.637  | 1.637  | 1.284  | 0.786  |
|      | 0.703  | 3.211  | #N/A   | #N/A   | #N/A   |
|      | 7.676  | 13     | #N/A   | #N/A   | #N/A   |
| 平方和  | 316.50 | 134.00 | #N/A   | #N/A   | #N/A   |
| t    | 4.032  | 0.977  | -1.466 | -4.205 | 65.359 |
| p    | 0.001  | 0.346  | 0.166  | 0.001  | 0.000  |

### 全水準の推定値

名義尺度の要因においては、全水準に対して推定値が求められている

| 項     | 推定値  | 標準誤差     | t値    | p値(Prob>t) |
|-------|------|----------|-------|------------|
| 切片    | 51.4 | 0.786423 | 65.36 | <.0001*    |
| 群[A1] | -5.4 | 1.284224 | -4.20 | 0.0010*    |
| 群[A2] | -2.4 | 1.637071 | -1.47 | 0.1664     |
| 群[A3] | 1.6  | 1.637071 | 0.98  | 0.3462     |
| 群[A4] | 6.6  | 1.637071 | 4.03  | 0.0014*    |
| 群[A5] | -0.4 | 1.637071 | -0.24 | 0.8108     |

ダミー変数2が

JMPの出力と一致

→ A1~A5足すと0になる

24

演習 2.3.1

3人の男性と4人の女性について次の  $y$  の値が得られたとき、 $a_{男} = 0$  とするダミー変数1と  $a_{男} + a_{女} = 0$  とするダミー変数2を用いる解析の違いを明らかにせよ。

| 性別 | ダミー変数1 | ダミー変数2 | $y$ |
|----|--------|--------|-----|
| 男  | 0      | 1      | 1   |
| 男  | 0      | 1      | 2   |
| 男  | 0      | 1      | 3   |
| 女  | 1      | -1     | 3   |
| 女  | 1      | -1     | 5   |
| 女  | 1      | -1     | 5   |
| 女  | 1      | -1     | 7   |

それぞれのダミー変数を横軸に、 $y$  の値を縦軸に取って2つの散布図を描き、回帰直線をあてはめて、回帰式を求めよ。それに男女別の平均値と全体の平均値を計算し、散布図に男女別の平均値の位置を示せ。回帰式の切片と傾きが何を意味するかを考えよ。

女性の2番目の観測値を除いた場合はどうなるか。

## ダミー変数1(1, 0)型と ダミー変数2(1, -1)型の違い

| 性別 | ダミー変数 | $y$ |
|----|-------|-----|
| 男  | 0     | 1   |
| 男  | 0     | 2   |
| 男  | 0     | 3   |
| 女  | 1     | 3   |
| 女  | 1     | 5   |
| 女  | 1     | 5   |
| 女  | 1     | 7   |

回帰直線(直線のあてはめ)を行うと

$$y = 2 + 3 \times (\text{ダミー変数})$$

切片を  $a$ 、傾きを  $b$  とおき

$$= a + b \times (\text{ダミー変数}) \quad \text{とする.}$$

切片  $a$  は

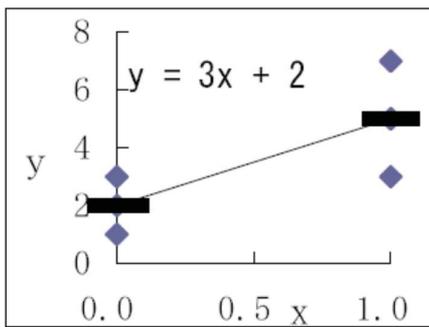
男の平均値  $(1 + 2 + 3) \div 3 = 2$  を示す

傾き  $b$  は

男を基準とした場合の男と女の平均値の差になっている

男の平均 = 2 女の平均 = 5

女の平均 - 男の平均 =  $5 - 2 = 3$



回帰直線(直線のあてはめ)を行うと

$$y = 2 + 3 \times (\text{ダミー変数})$$

$$= a + b \times (\text{ダミー変数})$$

その理由は、ダミー変数は男=0, 女=1なので

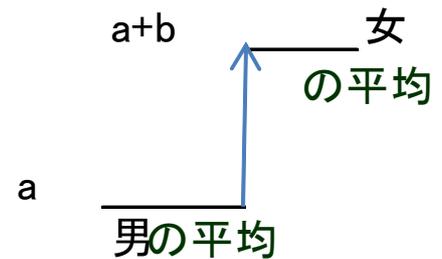
$$\text{男の平均} = a + b \times 0 = a \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{女の平均} = a + b \times 1 = a + b \quad \dots \textcircled{2}$$

①と②の式から

$$\text{女の平均} - \text{男の平均} = a + b - a = b$$

となっている。



ダミー変数の与え方で推定される回帰係数の意味が異なる。

| 性別 | ダミー変数 | y |
|----|-------|---|
| 男  | 1     | 1 |
| 男  | 1     | 2 |
| 男  | 1     | 3 |
| 女  | -1    | 3 |
| 女  | -1    | 5 |
| 女  | -1    | 5 |
| 女  | -1    | 7 |

回帰直線(直線のあてはめ)を行うと

$$y = 3.5 + (-1.5) \times (\text{ダミー変数})$$

$$= a + b \times (\text{ダミー変数})$$

ダミー変数は男=1, 女=-1なので

$$\text{男の平均} = a + b \times 1 = a + b = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{女の平均} = a + b \times -1 = a - b = 5 \quad \dots \textcircled{2}$$

①と②の式からaについて解くと

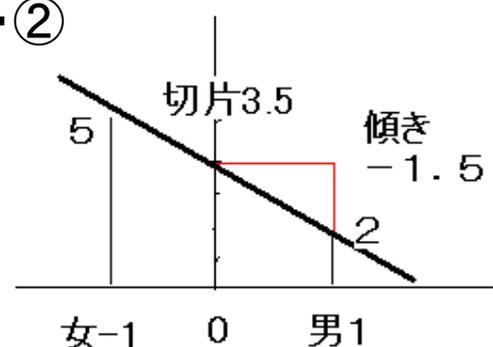
$$a = (\text{男の平均} + \text{女の平均}) \div 2$$

切片は男と女の平均の平均とわかる

①と②の式からbについて解くと

$$b = (\text{男の平均} - \text{女の平均}) \div 2$$

傾きは男と女の平均の差の半分, aからの性別による効果



# JMPによる解析

| パラメータ推定値 |     |          |      |              | パラメータ推定値 |      |          |       |              |
|----------|-----|----------|------|--------------|----------|------|----------|-------|--------------|
| 項        | 推定値 | 標準誤差     | t値   | p値(Prob> t ) | 項        | 推定値  | 標準誤差     | t値    | p値(Prob> t ) |
| 切片       | 2   | 0.816497 | 2.45 | 0.0580       | 切片       | 3.5  | 0.540062 | 6.48  | 0.0013*      |
| ダミー変数1   | 3   | 1.080123 | 2.78 | 0.0390*      | ダミー変数2   | -1.5 | 0.540062 | -2.78 | 0.0390*      |

## • データ削除後(女、No.2)

| パラメータ推定値 |     |          |      |              | パラメータ推定値 |      |          |       |              |
|----------|-----|----------|------|--------------|----------|------|----------|-------|--------------|
| 項        | 推定値 | 標準誤差     | t値   | p値(Prob> t ) | 項        | 推定値  | 標準誤差     | t値    | p値(Prob> t ) |
| 切片       | 2   | 0.912871 | 2.19 | 0.0936       | 切片       | 3.5  | 0.645497 | 5.42  | 0.0056*      |
| ダミー変数1   | 3   | 1.290994 | 2.32 | 0.0808       | ダミー変数2   | -1.5 | 0.645497 | -2.32 | 0.0808       |

- 注意すべきことは、ダミー変数の与え方で推定される回帰係数の意味が異なる。
- 自分の利用している解析ソフトがどのような方法でダミー変数を計算に利用しているか知ることは、結果を解釈する上でも非常に重要といえる。

29

## まとめ

- LINEST 関数は、ダミー変数を用いると、質的因子の効果を推定することができる。
- この解析方法は拡張性が極めて広く、欠測値のある2因子以上の実験などでも利用される。
- ダミー変数の生成方法は説明した2つの方法に限定されるものではない。
  - SAS のGLM では、表示2.3.2 の「ダミー変数1」とは逆に、最後の水準の効果を0としている。

30

## まとめ

ダミー変数の作り方にもコツがあり、  
今回の説明だけで完全にマスターすることは難しい。

テキストの演習を解くなどして理解を深め、  
自由に使えるようになろう。

31

## 出典と謝辞

本発表は、「医薬品開発のための統計解析-第2部  
実験計画法-」及び、過去の SAS Institute Japan  
JMP事業部主催セミナー「医薬品開発のための統  
計解析」講師資料を元に構成致しました

ご指導、資料の提供を頂きましたJMPセミナー講師  
陣の皆様にお礼申し上げますとともに、本発表の  
機会をいただきましたことをお礼申し上げます。

32

# じっくり勉強すれば身につく統計入門 非線形最小2乗法の基本的な考え方

## 第3部 非線形モデル

### 1. 非線形最小2乗法 (基礎)

#### 1.1 線形と非線形

#### 1.2 非線形最小2乗法の基本的な考え方

田辺三菱製薬株式会社  
創薬本部 データサイエンス部 中西展大

## はじめに

### 医薬品開発のための統計解析

#### -第3部 非線形モデル-改訂版

先週2016年5月26日に改訂版が発売！

「じっくり勉強すれば身につく統計入門」がテーマ

本日は、その冒頭を『改訂版』準拠にて紹介

演習ファイルの入手先

[http://www.scientist-press.com/12\\_336.html](http://www.scientist-press.com/12_336.html)



# 本日のお話

目標：非線形回帰の基礎を学んで逆推定まで理解しよう

## 1.1 線形と非線形

線形・非線形の違いは？（直線・曲線とは違います）

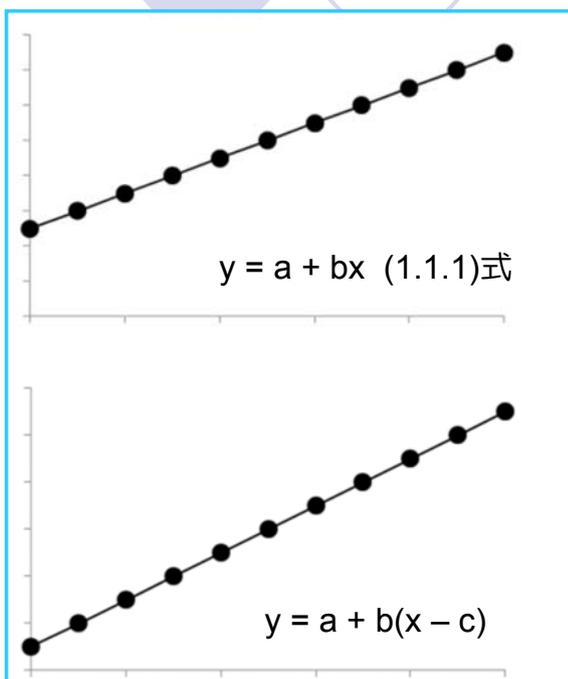
## 1.2 非線形最小2乗法の基本的な考え方（前半）

線形モデルを最小2乗法で～逆推定を非線形最小2乗法でまで

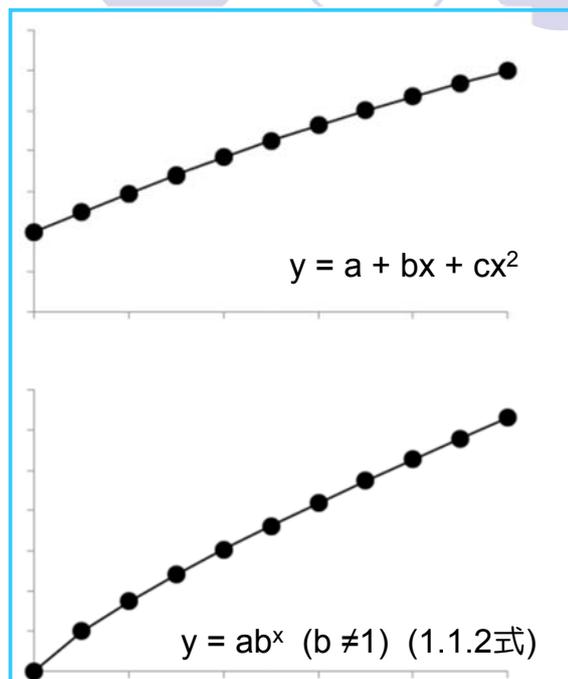
3

p. 3

## 1.1 線形と非線形（直線関係と曲線関係）



説明変数  $x$  と目的変数  $y$  が直線関係  
⇒ **直線関係**がある



説明変数  $x$  と目的変数  $y$  が曲線関係  
⇒ **曲線関係**がある

4

## 1.1 線形と非線形（直線関係と曲線関係）

直線関係か曲線関係か、は散布図を描き回帰直線を引くことで容易に判別できる。もう少し丁寧に定義する。

$y = ax + b$  は直線である。

⇒変数が増えて、 $y = ax_1 + bx_2 + c$

としても直線（平面）である。

⇒もし、 $y = abx + b$  としてもやはり直線である。

一般的に変数が1次式で結合しているなら、

直線関係である。

5

## 1.1 線形と非線形（直線関係と曲線関係）

$y = ab^x$  ( $b \neq 1$ ) 1.1.2式 これは、変数が1次ではない  
⇒曲線関係である。

両辺の自然対数 (ln) を取ると

$\ln(y) = \ln(a) + \ln(b)x$   $\ln(y)$  と  $x$  は1次式で結合している

⇒直線関係である

では、線形関係・非線形関係は

どのように見分ければよいか？

6

# 1.1 線形と非線形 (線形関係と非線形関係)

変数が1次式で結合しているなら,

直線関係である。

パラメータ (係数) が1次式で結合しているなら,

線形関係である

$y = ax + b$  は直線関係であり, 線形関係である。

パラメータが増えて,  $y = ax_1 + bx_2 + c$

としても直線関係 (平面) であり, 線形関係である。

⇒もし,  $y = abx + b$  としてもやはり直線関係であるが,

線形関係ではなく非線形関係である。

7

# 1.1 線形と非線形

①  $y = b_0 + b_1x = 50 + 10x$

(1.1.3)式 直線関係 線形関係

②  $y = b_0 + b_1x + b_2x^2 = 40 + 10x - 0.2x^2$

(1.1.4)式 曲線関係 線形関係

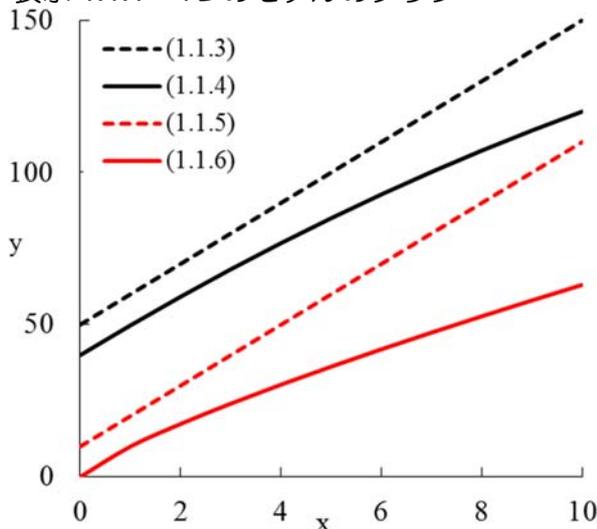
③  $y = 50 + b_1(x - b_2) = 50 + 10(x - 4)$

(1.1.5)式 直線関係 非線形関係

④  $y = b_0x^{b_1} = 10x^{0.8}$

(1.1.6)式 曲線関係 非線形関係

表示 1.1.1 4つのモデルのグラフ



直線関係・曲線関係

⇒ x に注目

式の説明変数が x だけ

→ 直線

$x^2$  や  $x^{0.8}$  がある

→ 曲線

線形関係・非線形関係

⇒ パラメータに注目

パラメータが線形式 → 線形

パラメータが線形式で表せない → 非線形

8

# 1.1 線形と非線形

関数の一般式;  $y = f(x, \beta)$   
変数 パラメータ

## 直線・曲線

直線  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$

曲線  $y = x_0^{b_0}$   
 $y = b_0x_0$

## 線形・非線形

線形  $y = b_0 + b_1x + b_2x^2$

非線形  $y = b_0b_1x_0$   
 $y = b_0b_1x_0^2$

“推定”の目的とするところは“パラメータ”の推定である。  
 よって直線・曲線より線形・非線形が推定時に問題となる。

|                |                                  |
|----------------|----------------------------------|
| 線形関係でのパラメータ推定  | Excel; LINEST関数<br>JMP; モデルのあてはめ |
| 非線形関係でのパラメータ推定 | Excel; ソルバー<br>JMP; 非線形回帰        |

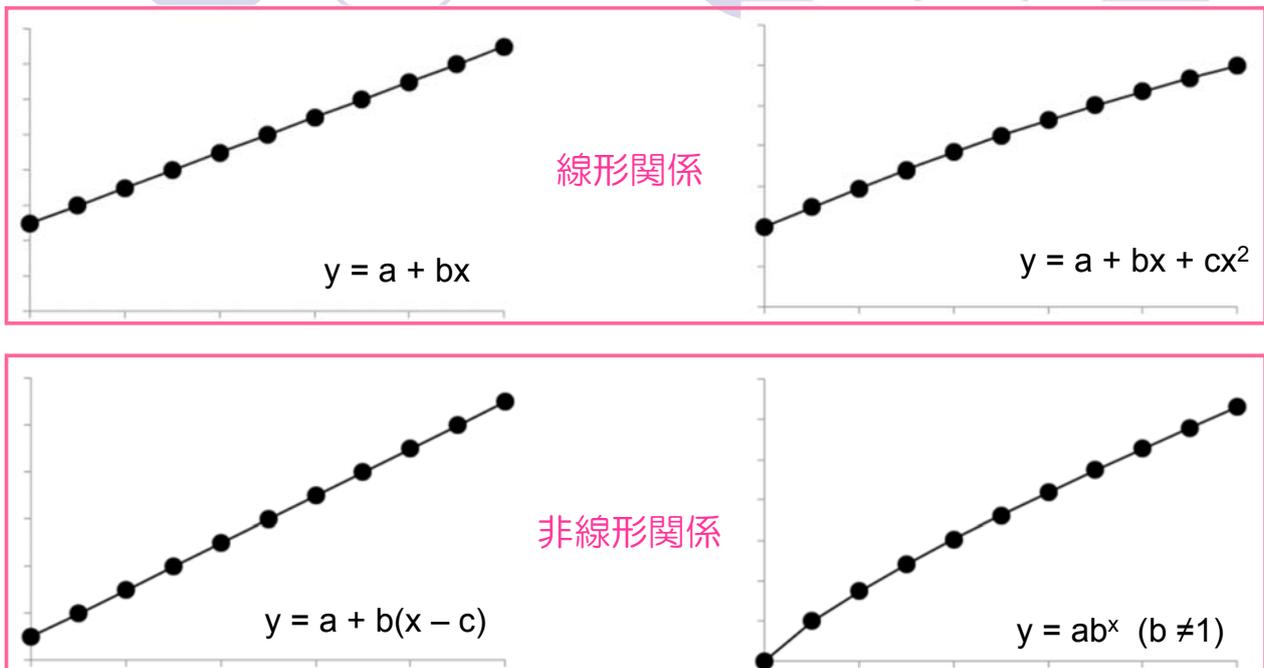
9

# 1.1 線形と非線形

## この節のまとめ

- この節では『非線形』とは何を意味しているのかについて『線形』と比較して説明した。
- 『線形 / 非線形』関係とは、**パラメータに注目**し、式がパラメータ  $b$  に対して一次式ならば線形  
 パラメータ  $b$  に対して一次式でない場合は非線形となることを学んだ。
- 『線形・非線形』と『直線・曲線』関係は全く異なるということを十分に理解することが大切である。

## 1.1 線形と非線形



11

## 1.2 非線形最小2乗法の基本的な考え方

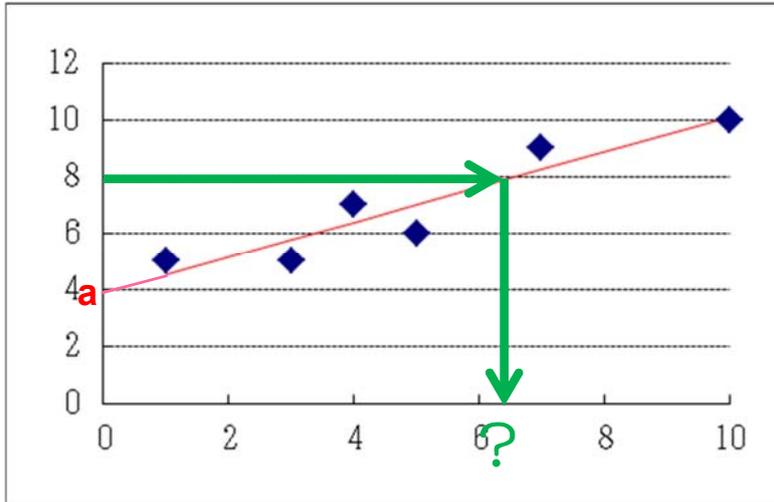
- (1) Excel ソルバー による回帰式の解析
- (2) JMP 非線形回帰 による回帰式の解析
- (3) ソルバー による逆推定の解析
- (4) JMPによる逆推定の解析
- (5) 推定値の標準誤差
- (6) 平均値の標準誤差
- (7) 単回帰式の傾き  $b$  の標準誤差
- (8) 非線形最小2乗法による推定値の標準誤差

12

## 1.2 非線形最小2乗法の基本的な考え方

$y = a + bx (= 3.9 + 0.62x)$  という式 (直線・線形) から、 $y = 8$  となる  $x$  を推定 (逆推定) する方法を考える。

※()は推定値



13

## 1.2 非線形最小2乗法の基本的な考え方

$y = a + bx (= 3.9 + 0.62x)$  という式 (直線・線形) から、 $y = 8$  となる  $x$  を推定 (逆推定) する方法を考える。

※()は推定値

### [方法 1] 代数的に求める方法

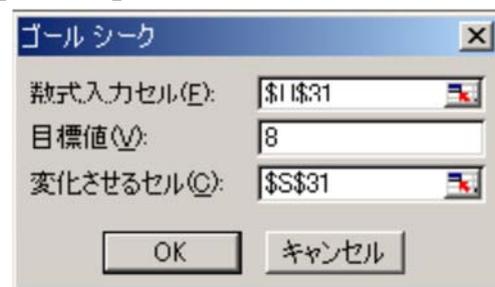
$y = a + bx$  の式を変形して

$$x = (y - a) / b$$

$a = 3.9$ ,  $b = 0.62$ ,  $y = 8$   
を代入

⇒ 計算により  $x$  を求める。

### [方法 2] ゴールシークを使う方法



ここでは、

『方法3 パラメータとして直接求める方法』を考える

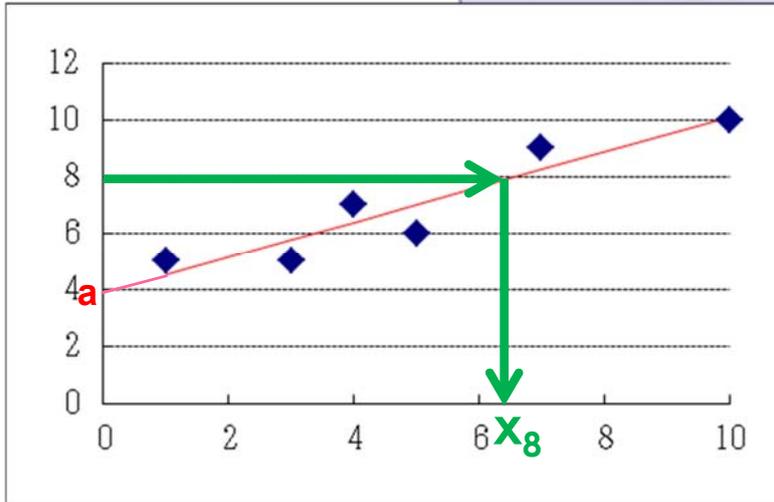
14

## 1.2 非線形最小2乗法の基本的な考え方

$y = a + bx$ について

$y = 8$  となる  $x$  の値を  $x_8$  とすると  $y = 8 + b(x - x_8)$  (1.2.1式) と表すこともできる。

パラメータ推定が、そのまま逆推定



15

## 1.2 非線形最小2乗法の基本的な考え方

$y = a + bx$ について

$y = 8$  となる  $x$  の値を  $x_8$  とすると  $y = 8 + b(x - x_8)$  (1.2.1式) と表すこともできる。

パラメータ推定が、そのまま逆推定

展開すると

$$y = 8 + bx - b \times x_8$$

←パラメータに積項があるので

直線・非線形なモデル

非線形モデルに対して最小2乗法でパラメータを推定する方法を**非線形最小2乗法**とか**非線形回帰分析**という。

非線形回帰分析 を適用するツールとして以下を紹介

EXCEL 「ソルバー」

JMP 「非線形回帰」

16

# ソルバー：Solverとは

solve

音節 solve 発音記号 / sálv, s'ɔ : lv | s'ɔlv / 音声を聞く

## 【動詞】【他動詞】

〈問題・難事などを〉解決する, 解く; 解明する, 解答する.

用例 ④ • solve a problem 問題を解く.

sólver【名詞】

[ラテン語 solvere 「ゆるめる」から; 【名詞】 solution]

“解決者” という名の通り, こちらが正しく問題を教えれば, solve “解決” してくれる機能. 確認した限り, EXCEL2003以降には標準搭載されている. (マイナーチェンジは有り) 本日はEXCEL2010をベースに解説する.

出典：weblio英和和英

## 参考：ソルバー機能の有効化

ソルバー機能はDefaultではoffになっているため, 機能を有効化する.

2003では『ツール』→『アドイン』で右下図と似た表示が出る.

The image illustrates the steps to enable the Solver add-in in Excel 2010. It shows the 'File' ribbon with 'Options' selected, the 'Advanced' category expanded, and 'Solver Add-in' checked. The 'Add-ins' dialog box is shown, with 'Excel Add-ins' selected and the 'Settings...' button highlighted. The 'Solver Add-in' checkbox is also highlighted in the dialog box.

# 参考：ソルバー機能の有効化の確認

『データ』タブに『ソルバー』が出来ていればOK



## アルゴリズムイメージ

ソルバーは“最小化問題”を“反復計算”で解くアルゴリズムです。

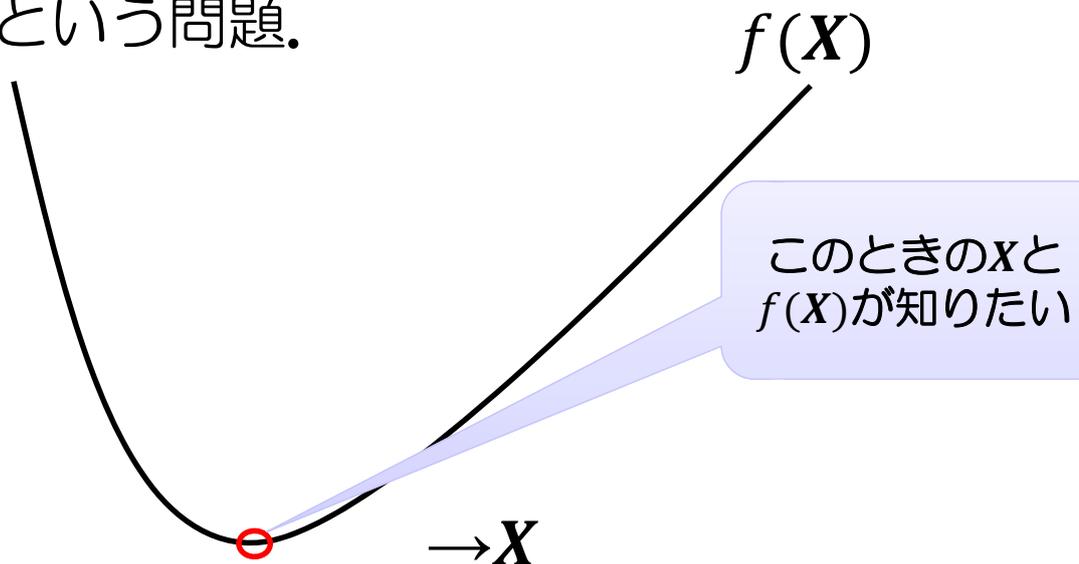
正確なアルゴリズムの解説は出来ません。

あくまで“イメージ”のみ解説します。

JMPの非線形回帰も似たアルゴリズムを採用しています。  
詳細は不勉強でわかりません。

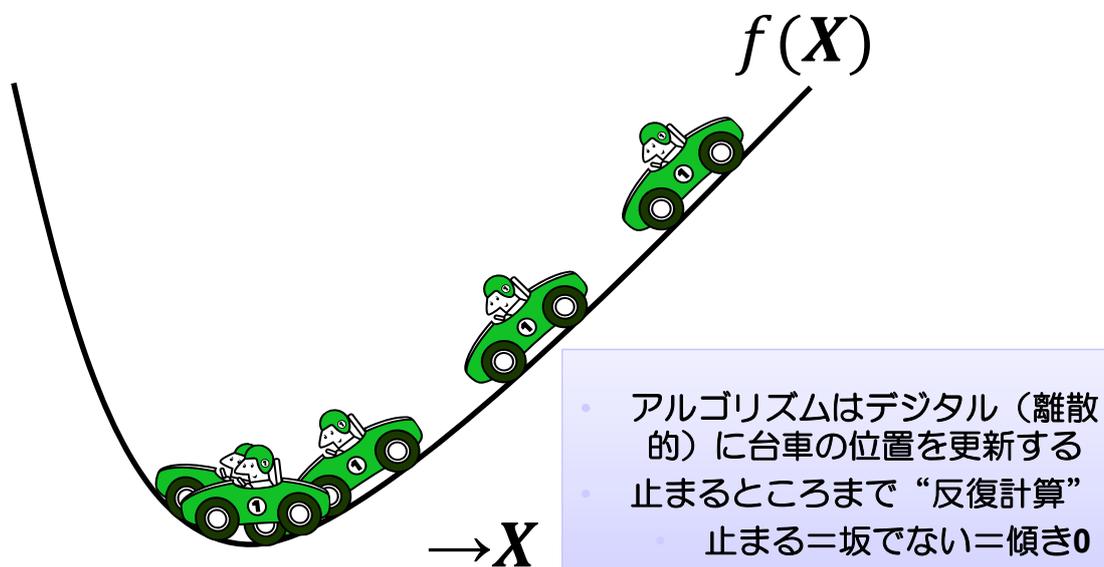
# “最小化問題”とは

ある関数 $f(X)$ が与えられたときに、 $f(X)$ が最少となる $X$ 及びそのときの $f(X)$ を求めようという問題。

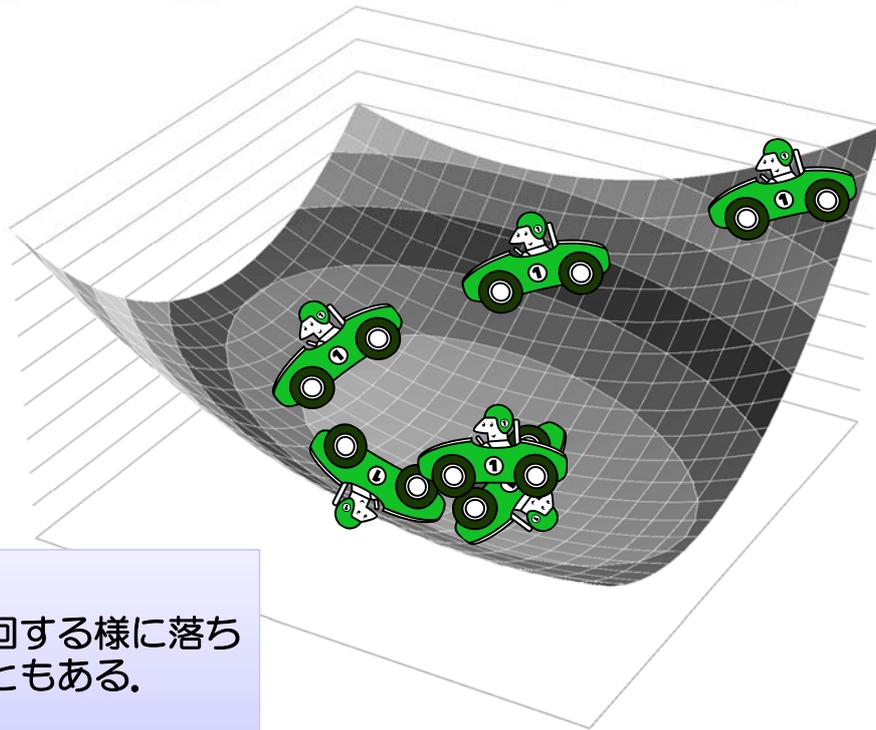


# どうするか？

適当なところからミニカーを転がして止まるのを待つ。



$X$ が多次元でも基本的には同じ



周囲を巡回する様に落ちることもある。

ここで気づく諸問題

転がり方はどういう計算？

解説は省略。

何手法か選ぶことは出来ます。

完全に止まるのを待つ？

まず不可能です。おおよそ“止まった”と判断したところで辞めます。

止まったと判断する基準（収束条件）はオプションで調節できます。

# ソルバーの弱点 局所解について

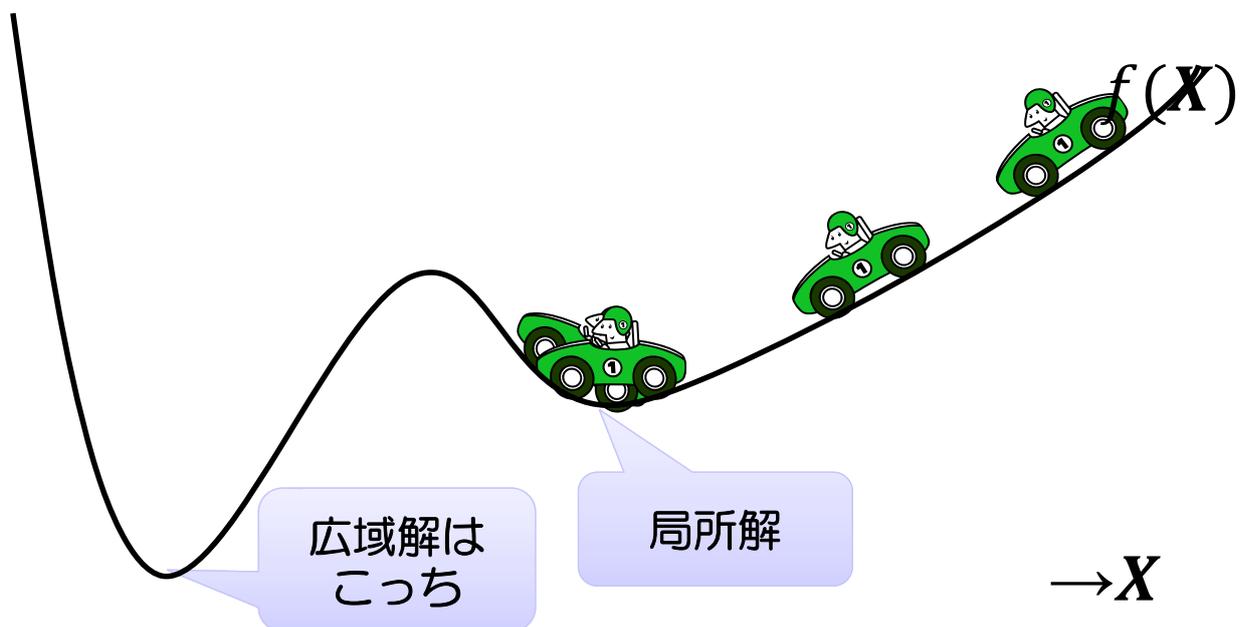
複雑な問題においてはミニカーの止まった場所が $f(\mathbf{X})$ の最小値でない場合があり得る。

$f(\mathbf{X})$ の最小値を与える $\mathbf{X}$ を“広域解”と呼ぶのに対し、

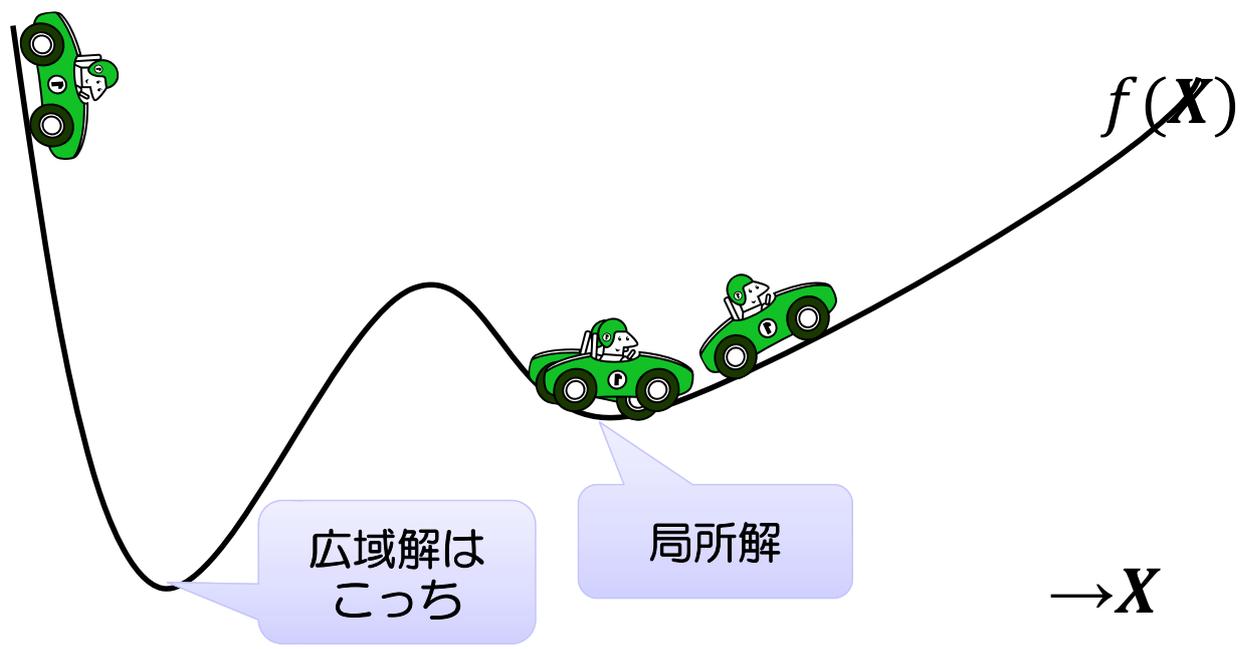
$f(\mathbf{X})$ の最小値でないのにミニカーの止まる $\mathbf{X}$ を“局所解”と呼ぶ。

反復計算が“局所解”を導いてしまうことを、“局所解に捕まる”と呼ぶことがある。

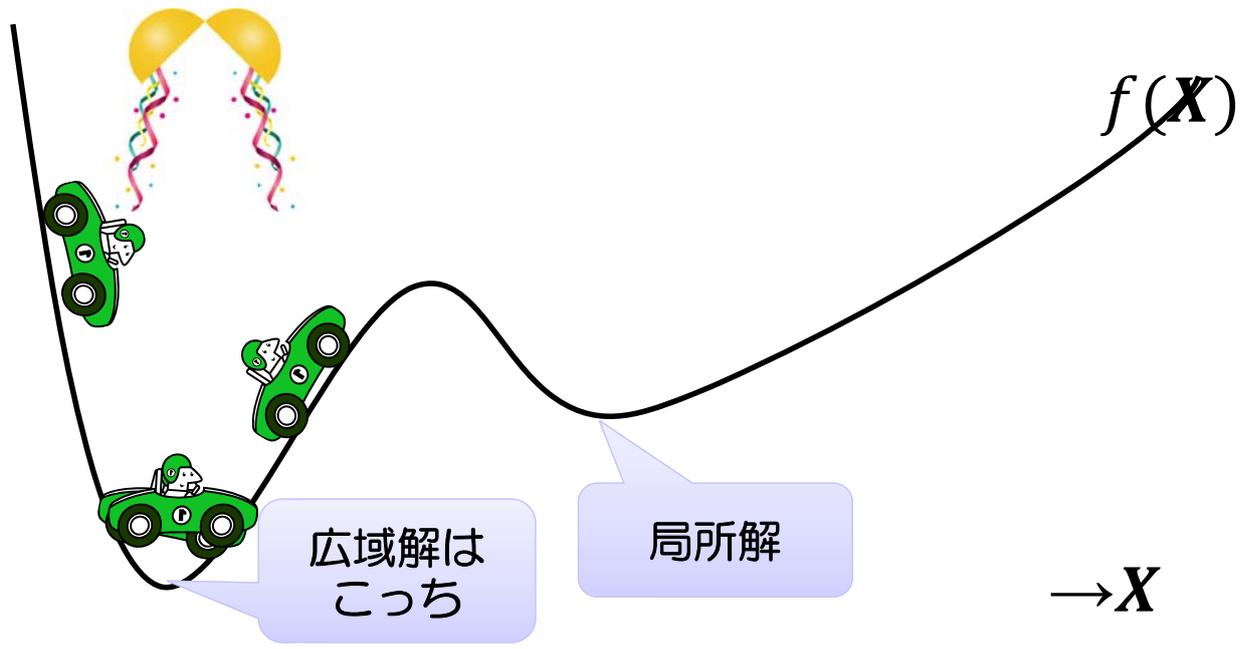
## イメージ1



# イメージ2



# 成功例



局所解を回避するには

初期値に気を配るより仕方がない。

話を戻します。

## 1.2 非線形最小2乗法の基本的な考え方

- (1) Excel ソルバー による回帰式の解析
- (2) JMP 非線形回帰 による回帰式の解析

$y = a + bx$  (直線・線形) で解説する。

- (3) ソルバー による逆推定の解析
- (4) JMPによる逆推定の解析

$y = 8 + b(x - x_8)$  (直線・非線形) で解説する。

# (1) Excel ソルバーによる回帰式の解析

表示 1.2.1 ソルバーによる回帰式の推定

第1部 § 4.3 (3) 表示4.3.3の再掲

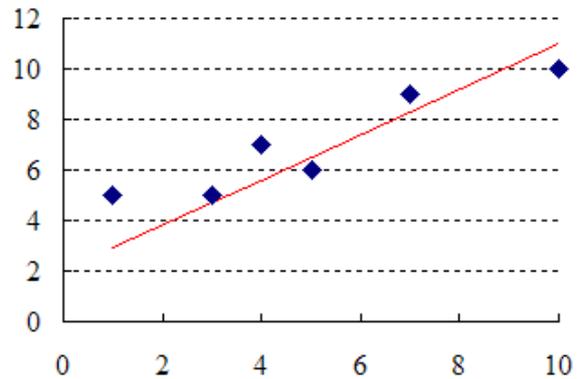
$$y \text{ の予測値} = a + b \times x$$

| i | x  | y  | yhat | e    |
|---|----|----|------|------|
| 1 | 1  | 5  | 2.9  | 2.1  |
| 2 | 3  | 5  | 4.7  | 0.3  |
| 3 | 4  | 7  | 5.6  | 1.4  |
| 4 | 5  | 6  | 6.5  | -0.5 |
| 5 | 7  | 9  | 8.3  | 0.7  |
| 6 | 10 | 10 | 11.0 | -1.0 |

|   |     |
|---|-----|
| a | 2.0 |
| b | 0.9 |
| S | 8.2 |

残差の2乗和  
= SUMSQ

残差 =  $y - \hat{y}$



最小2乗法は『残差  $e$  の平方和  $S$  が最小になるモデルが最も当てはまりがよい』ことを意味する。

残差平方和  $S$  を “最小化” する “問題” ?  
⇒ソルバーの登場!

31

# (1) Excel ソルバーによる回帰式の解析

EXCEL 2010の場合

トップメニューの『データ』から  
“分析”メニューの『ソルバー』  
を選択

↓

[目的セル] 残差平方和  $S$  のセルを指定

[目標値] 最小値を選択

[変化させるセル] パラメータ  $a, b$  のセル  
を指定

↓

[解決] ボタンをクリック

( $y$  が目標値になるための  $a$  や  $b$  が計算  
され,  $\hat{y}$  ・残差  $e$  ・残差平方和  $S$ ,  
グラフの直線も連動して更新される).

↓

ソルバーの解で良ければ [OK] をクリック,  
推定されたそれぞれの値が確定する。



!注意!

パラメータの初期値が解からあまりにも乖離  
していると解が求められない, 間違った解が  
得られる, など不具合が生じるころがある。  
32  
ので, グラフを描く習慣をつけたほうが良い。

# (1) Excel ソルバーによる回帰式の解析

表示 1.2.1 ソルバーによる回帰式の推定

| i | x  | y  | yhat | e    |
|---|----|----|------|------|
| 1 | 1  | 5  | 2.9  | 2.1  |
| 2 | 3  | 5  | 4.7  | 0.3  |
| 3 | 4  | 7  | 5.6  | 1.4  |
| 4 | 5  | 6  | 6.5  | -0.5 |
| 5 | 7  | 9  | 8.3  | 0.7  |
| 6 | 10 | 10 | 11.0 | -1.0 |

初期値

|   |     |
|---|-----|
| a | 2.0 |
| b | 0.9 |
| S | 8.2 |

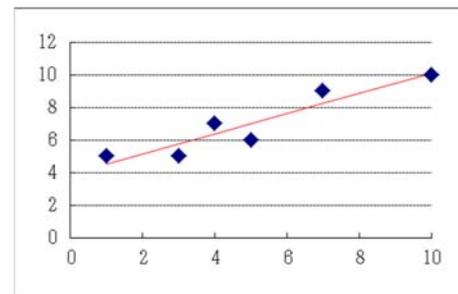
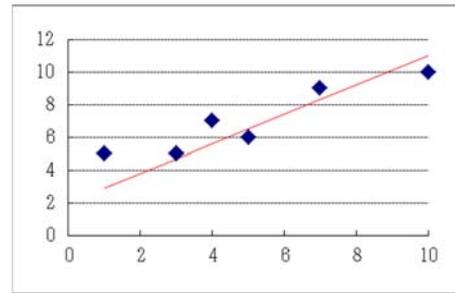
| i | x  | y  | yhat | e    |
|---|----|----|------|------|
| 1 | 1  | 5  | 4.5  | 0.5  |
| 2 | 3  | 5  | 5.8  | -0.8 |
| 3 | 4  | 7  | 6.4  | 0.6  |
| 4 | 5  | 6  | 7.0  | -1.0 |
| 5 | 7  | 9  | 8.2  | 0.8  |
| 6 | 10 | 10 | 10.1 | -0.1 |

結果

|   |      |
|---|------|
| a | 3.90 |
| b | 0.62 |
| S | 2.78 |

|     |                   |
|-----|-------------------|
| D5: | =\$H\$5+\$H\$6*B5 |
| E5: | =C5-D5            |
| H7: | =SUMSQ(E5:E10)    |



33

# (2) JMP 非線形回帰による回帰式の解析

【12-単回帰.JMP】を開く

データテーブルの空いているところをダブルクリックして列を追加, 新たにできた列を右クリックして[列情報]画面で [yhat] など列名や各種情報を選択する.

↓  
列名セルをクリックして[計算式]を選択

↓  
パラメータ (a, b)と初期値を登録

↓  
パラメータ, テーブル列を使って計算式を入力

↓  
[OK]をクリック  
(yhatの値が自動的に計算される)

↓

表示 1.2.3 計算式指定画面



34



## (2) JMP 非線形回帰による回帰式の解析

表示 1.2.7 JMPによる解析結果

Sum of Square Error 残差平方和  
 Degree of Freedom Error 残差平方和の自由度  
 Mean Square Error 平均平方 SSE÷DFE  
 Root Mean Square Error 平均平方の平方根  $\sqrt{MSE}$

解

|                     |                    |                 |                     |                          |  |
|---------------------|--------------------|-----------------|---------------------|--------------------------|--|
|                     | <b>SSE</b><br>2.78 | <b>DFE</b><br>4 | <b>MSE</b><br>0.695 | <b>RMSE</b><br>0.8336666 |  |
| パラメータ               | 推定値                | 近似標準誤差          | 下側信頼限界              | 上側信頼限界                   |  |
| a                   | 3.9                | 0.68068593      | 2.01011289          | 5.78988711               |  |
| b                   | 0.62               | 0.11789826      | 0.29266195          | 0.94733805               |  |
| 解法: 解析 Gauss-Newton |                    |                 |                     |                          |  |

Excelで求めた結果と一致します

JMPでは信頼限界も求められる  
 第1部 § 4.3 (7)参照

(これはまだ、線形モデルなので、はExcelではLINEST関数を使えば求められる)

## (3) ソルバーによる逆推定の解析

回帰式の推定と同様の方法で逆推定の解を求めることができる。

表示 1.2.8 ソルバーによる非線形パラメータの推定

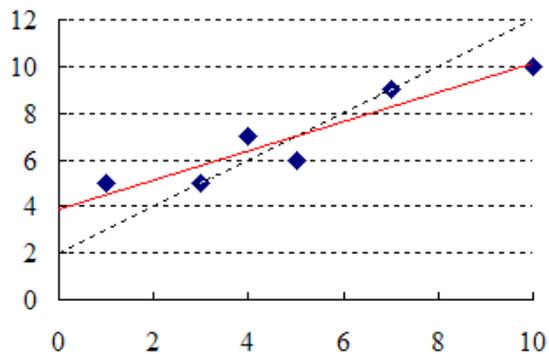
$\hat{y}$ の入力式 =  $8 + b(x - x_8)$

| i | x  | y  | yhat  | e     | yhat  | e     |
|---|----|----|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 1  | 5  | 3.00  | 2.00  | 4.52  | 0.48  |
| 2 | 3  | 5  | 5.00  | 0.00  | 5.76  | -0.76 |
| 3 | 4  | 7  | 6.00  | 1.00  | 6.38  | 0.62  |
| 4 | 5  | 6  | 7.00  | -1.00 | 7.00  | -1.00 |
| 5 | 7  | 9  | 9.00  | 0.00  | 8.24  | 0.76  |
| 6 | 10 | 10 | 12.00 | -2.00 | 10.10 | -0.10 |

|    |        |    |       |
|----|--------|----|-------|
| x8 | 6.000  | x8 | 6.613 |
| b  | 1.000  | b  | 0.620 |
| S  | 10.000 | S  | 2.780 |

初期値

結果



## (4) JMP による逆推定の解析

【12-逆推定.JMP】を開く  
 データテーブルに[yhat]の列を追加して [計算式] 入力画面を開く。  
 ↓  
 計算式 “ $8 + (x - x_g)$ ” を入力 ⇒ [OK]  
 ↓  
 トップメニュー[分析]⇒[モデル化] ⇒[非線形回帰]⇒[OK]  
 ↓  
 『非線形回帰のあてはめ』画面 ⇒[設定パネル]の[実行]  
 ↓  
 解が求められる。

表示 1.2.9 JMPによる解析結果

| 解                   |              |            |           |
|---------------------|--------------|------------|-----------|
| SSE                 | DFE          | MSE        | RMSE      |
| 2.78                | 4            | 0.695      | 0.8336666 |
| パラメータ               |              | 推定値        | 近似標準誤差    |
| x8                  | 6.6129032258 | 0.62881217 |           |
| b                   |              | 0.62       | 0.1179826 |
| 解法: 解析 Gauss-Newton |              |            |           |
| 推定値の相関              |              |            |           |
|                     | x8           | b          |           |
| x8                  | 1.0000       | -0.4878    |           |
| b                   | -0.4878      | 1.0000     |           |

逆推定結果が精度付き  
 (信頼区間も表示可能)  
 で出てくるのが大きな  
 メリット!

SSEなどやパラメータ b は表示1.2.8 で求めた結果と一致

39

## 1.2 非線形最小2乗法の基本的な考え方

### この節前半のまとめ

- 本節では、最小2乗法の最も簡単な例として線形モデルからスタートし、非線形最小2乗法を用いる逆推定まで順次取り上げて、非線形最小2乗法の基本的な考え方を説明した。
- また、ExcelソルバーとJMP「非線形回帰」を用いた解の求め方を学習した。

40

## 第3部 非線形モデル この後の発展を少し紹介

### 1.4 Emaxモデルとロジスティック曲線

Emax理論による，用量反応モデル

$$y = \frac{E_{max} \times x^\gamma}{x^\gamma + D_{50}^\gamma}$$

この $D_{50}$ は50%反応に達する， $x$ を推定（逆推定）するパラメータ。  
Emaxモデルでパラメータ推定すれば，50%反応濃度（用量 etc）が同時に推定される。

これも各パラメータが，非線形の関係なので，非線形回帰による解決を行う。

41

## 第3部 非線形モデル この後の発展を少し紹介

### 1.4 Emaxモデルとロジスティック曲線

Emax理論による，用量反応モデル

$$y = \frac{y_\infty}{1 + \frac{1-p}{p} \left(\frac{x_p}{x}\right)^b}$$

このように少し変形すると， $p \times 100\%$ 反応に達する， $x$ を直接推定（逆推定）出来る。

2.2 効力比 : 2剤での $D_{50}$ の比を直接推定

2.3 併用効果 : 2剤同時使用時の効果を推定

42

## 第3部 非線形モデル この後の発展を少し紹介

### 4.2 ロジスティック回帰（基礎）

非線形最小2乗法は、誤差分布に等分散の正規分布を仮定した場合に、最尤不偏推定量になる保証がある。

誤差に2項分布を仮定するロジスティック回帰では、非線形最小2乗法は適当ではなく、最尤法による非線形回帰を行う必要がある。

これも、本テキストの範囲として取り扱っている。

43

## 出典と謝辞

本発表は、「医薬品開発のための統計解析-第3部 非線形モデル-改訂版」及び、過去のSAS Institute Japan JMP事業部主催セミナー「医薬品開発のための統計解析」講師資料を元に構成致しました

ご指導、資料の提供を頂きましたJMPセミナー講師陣の皆様にお礼申し上げますとともに、本発表の機会をいただきましたことにお礼申し上げます。

# Appendix

ソルバーの多くの機能を理解するために、いくつか例を追加しました。

45

## ソルバーの操作（基本1）

The image shows the Excel Solver Parameters dialog box overlaid on a spreadsheet. The spreadsheet contains the following data:

|                     | C | D   | E | F  | G      | H |
|---------------------|---|-----|---|----|--------|---|
| ソルバーの初歩: 二次関数の最小値算出 |   |     |   |    |        |   |
| yを最小にするxを求める        |   |     |   |    |        |   |
| $y = Ax^2 + Bx + C$ |   |     |   |    |        |   |
| A=                  |   | 1   |   | x= | -1.5   |   |
| B=                  |   | 3   |   | y= | -12.25 |   |
| C=                  |   | -10 |   |    |        |   |

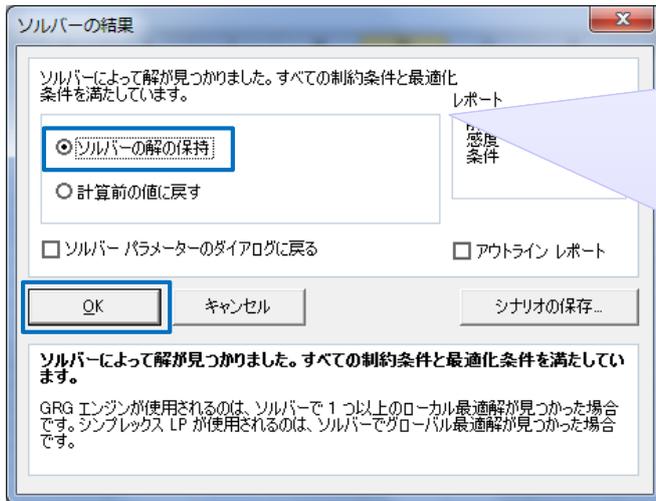
The Solver Parameters dialog box is configured as follows:

- 目的セルの設定 (T):  $\$H\$5$
- 目標値:  最小値 (M)  最大値 (M)  指定値 (V) 0
- 変数セルの変更 (B):  $\$H\$5$
- 制約条件の対象 (L): (Empty)
- 制約のない変数を非負数にする (K)
- 解決方法の選択 (E): GRG 非線形
- 解決方法: 滑らかな非線形問題をレクスイエンジンで解決します。
- ヘルプ (H) | 解決 (S) | 閉じる (O)

Annotations in blue callouts:

- 最小値を選択 (points to the selected radio button)
- チェックを必ず外す (points to the unchecked checkbox)
- 設定が確認できたら押す (points to the Solve button)

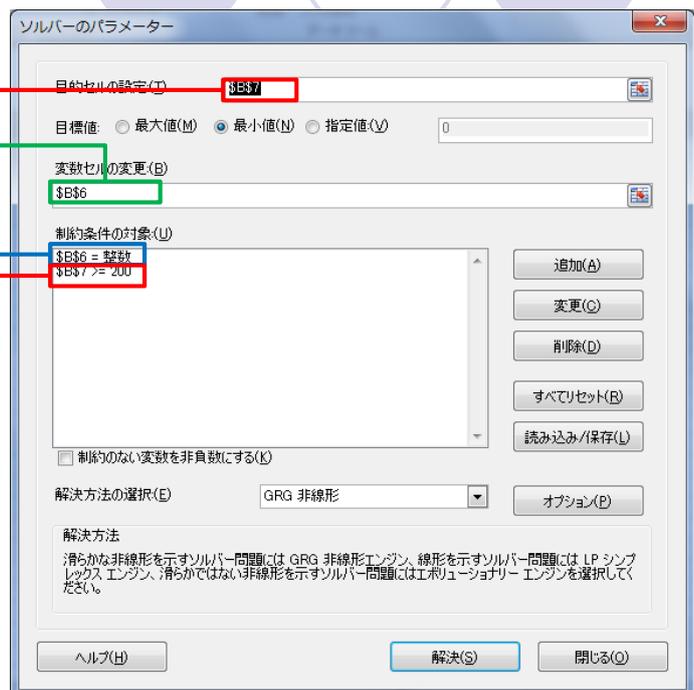
# ソルバーの操作（基本2）



- 基本的にはこの画面が出て終了。
- その他「エラー」と「収束しない」パターンが存在する。
- その対応は解決したい最小化問題に応じて異なるので、試行錯誤して経験を積むしかない。

# ソルバーの操作（制約1）

|   | A  | B         | C | D | E |
|---|--|-----------|---|---|---|
| 1 | 制約をつける：貯蓄シミュレーション                        |           |   |   |   |
| 2 | 100万円を年 <i>p</i> %複利で預けたら、何年で200万円になるか？  |           |   |   |   |
| 3 | n年後の残高は $100 \cdot (1 + p/100)^n$ であるから、 |           |   |   |   |
| 4 |  |           |   |   |   |
| 5 | p=                                       | 2         |   |   |   |
| 6 | n=                                       | 36        |   |   |   |
| 7 | 残高=                                      | 203.98871 |   |   |   |



# ソルバーの操作（制約2）

|    |                                |         |          |     |         |
|----|--------------------------------|---------|----------|-----|---------|
| 1  | 線形計画問題                         |         |          |     |         |
| 2  | 行列Aとベクトルbcが与えられた時              |         |          |     |         |
| 3  | $Ax=b$ を満たす成分が全て非負のベクトルxの内、    |         |          |     |         |
| 4  | $c^T x$ を最小とするxを求める。これが線形計画問題。 |         |          |     |         |
| 5  |                                |         |          |     |         |
| 6  | (製品構成)                         | A=      | 1        | 2   | 3       |
| 7  |                                |         | 0        | 1   | 2       |
| 8  | (総必要数)                         | b=      | 300      | 400 |         |
| 9  | (入荷コスト)                        | c=      | 1        | 2   | 4       |
| 10 |                                |         |          |     |         |
| 11 | (入荷数)                          | x=      | 0        | 150 | 0       |
| 12 |                                |         |          |     | 83.3333 |
| 13 | (総必要数との差異) $(Ax-b)_i$          |         | 0        | 0   |         |
| 14 | (総コスト)                         | $c^T x$ | 716.6667 |     |         |

# ソルバーの操作（オプション）

『最大値』と『指定値』は基本的に不要  
 最大値は $-f(X)$ の最小値と本質的に同じ  
 推定値は $(a - f(X))^2$ の最小値と本質的に同じ

ミニカーの転がし方ルールが選べる。

収束条件、中断条件などの設定が可能。